课堂测验一

1. 在 xy 坐标系中, 考虑由 $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 所决定的区域。将该区域围绕 y 轴选择 360 度所得几何体记为 T 。试求 T 的体积。

解:

不难看出, $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 所决定的区域是个以 $(2, 0)$ 为圆心且半径为 1 的圆盘。用 $\text{Vol}(T)$ 来代表 T 的体积, 用 $S(v)$ 代表垂直于 y 轴且与 y 轴交于 v 处的平面和 T 相交所得区域。易知 $S(v)$ 为圆环。用 $R(v)$ 和 $r(v)$ 分别代表圆环 $S(v)$ 的外半径和内半径。用 $A(v)$ 代表 $S(v)$ 的面积。将 $y = v$ 带入 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 并求解 x , 可得

$$x = 2 \pm \sqrt{1 - v^2}.$$

因此 $R(v) = 2 + \sqrt{1 - v^2}$ 且 $r(v) = 2 - \sqrt{1 - v^2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \int_{-1}^1 A(y) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \pi [R(y)]^2 - \pi [r(y)]^2 \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \pi \left[2 + \sqrt{1 - y^2} \right]^2 - \pi \left[2 - \sqrt{1 - y^2} \right]^2 \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \pi \left[4 + 4\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2 \right] - \pi \left[4 - 4\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2 \right] \, dy \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} \, dy \\ &= 8\pi \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 4\pi^2. \end{aligned}$$

注：在上述计算中，注意到 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy$ 是单位圆盘面积的一半，我们直接有

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

注：我们本题中实际上计算了圆环（例如，充满气的内胎）的体积。